



УДК 378.147.091.3:512.644 (045)

## ТЕХНОЛОГІЯ НАВЧАННЯ ТЕОРЕТИЧНИХ ОСНОВ ЗМІСТОВОЇ ЛІНІЇ «РІВНЯННЯ І НЕРІВНОСТІ»

Соколенко Л.О., к. пед. н.,  
доцент кафедри вищої математики  
та методик навчання фізико-математичних дисциплін  
Чернігівський національний педагогічний  
університет імені Т.Г. Шевченка

У статті висвітлено технологію навчання теоретичних основ змістової лінії «Рівняння і нерівності», що є наскрізною для всього курсу математики середньої та вищої школи. Запропоновано систематизований підхід до навчання, який можна запровадити під час читання курсу за вибором «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» для студентів-випускників педагогічних університетів, які здобувають вищу освіту за спеціальністю 014 «Середня освіта. Математика». Увага акцентується на розгляді рівнянь і нерівностей з позиції математичної логіки, а саме: означення цих та пов'язаних із ними визначень з використанням поняття висловлювальної форми, предиката; взаємозв'язкам слідування та відповідності множин рівнянь (нерівностей) їх властивостям; основним (типовим) перетворенням рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності. Обґрунтовується необхідність дотримання принципів, на яких базується професійна підготовка вчителя математики, під час читання курсу за вибором.

**Ключові слова:** технологія навчання, теоретичні основи, змістова лінія, рівняння, нерівність, висловлювальна форма, предикат, відношення логічного слідування, відношення рівносильності, професійна підготовка вчителя математики.

В статті представлена технологія обучения теоретических основ содержательной линии «Уравнения и неравенства», которая проходит через весь курс математики средней и высшей школы. Предложен систематизированный подход к обучению, который можно использовать при чтении курса по выбору «Некоторые вопросы школьного курса математики с точки зрения высшей» для студентов-выпускников педагогических университетов, которые получают высшее образование по специальности 014 «Среднее образование. Математика». Особое внимание уделяется рассмотрению уравнений и неравенств с позиции математической логики, а именно: формулированию определенных этих и связанных с ними определенных с использованием понятия высказывательной формы, предиката; отношениям следования и равносильности множеств уравнений (неравенств) их свойствам; основным (типичным) преобразованиям уравнений (неравенств) с точки зрения их эквивалентности. Обосновывается соблюдение принципов, на которых базируется профессиональная подготовка учителя математики, во время чтения курса по выбору.

**Ключевые слова:** технология обучения, теоретические основы, содержательная линия, уравнение, неравенство, высказывательная форма, предикат, отношение логического следования, отношение равносильности, профессиональная подготовка учителя математики.

Sokolenko L.A. TECHNOLOGY TRAINING OF THEORETICAL FOUNDATIONS OF CONTENT LINE «EQUATIONS AND INEQUALITIES»

In the article presented technology training of theoretical foundations of content line "Equations and Inequalities", which goes through the mathematics course for secondary and high school. Systematization approach proposed to training, which can be used when reading the optional of elective courses "Some issues of school mathematics course in terms of higher" for undergraduates of the Pedagogical Universities, which receives a higher education, speciality 014 "Secondary education. Mathematics". Particular attention is paid to the equations and inequalities from the standpoint of mathematical logic, namely, the definition of these and related concepts, using the concept of propositional form, the predicate; relations repetition and equivalence on the set of equations (inequalities) and their properties; basic (typical) transformations of equations (inequalities) point of view their equivalence. Observance of the principles of learning make while reading the course of choice which is based for the training of mathematics teachers.

**Key words:** technology training; theoretical foundations, content line, equation, inequality, propositional form, predicate, relation of logical consequence, relation of equivalence, professional training of the teacher of mathematics.

**Постановка проблеми.** «Рівняння та нерівності» є однією з наскрізних змістових ліній шкільного курсу математики (далі – ШКМ). Різні види рівнянь, методи та способи їх розв'язування вивчають із 5-го по 11-й клас. Знайомство з нерівностями

розпочинають у 9-му класі та продовжують вивчати в курсі алгебри і початків аналізу старшої школи.

Забезпечення оволодіння учнями мовою алгебри, уміннями здійснювати перетворення алгебраїчних виразів, розв'язувати



рівняння, нерівності та їх системи, моделювати за допомогою рівнянь реальні ситуації, пояснювати здобуті результати є специфічним освітнім завданням основної школи [12, с. 3].

Протягом курсу алгебри і початків аналізу необхідно навчити учнів розв'язувати трансцендентні рівняння та нерівності (тригонометричні, показникові, логарифмічні) й ірраціональні рівняння та нерівності. Це пов'язано з розглядом властивостей відповідних функцій.

Рівняння є одним із найважливіших понять математики. У більшості практичних та наукових задач, де певну величину неможливо безпосередньо виміряти або обчислити за готовою формулою, вдається скласти співвідношення (або декілька співвідношень) для визначення невідомої величини.

У шкільному курсі, як правило, розглядають рівняння, в яких невідомі набувають числових значень. Окремі види рівнянь, зокрема ті, у яких невідомими є цілі числа (*діафантові рівняння*), функції (*диференціальні, функціональні рівняння*) можуть бути предметом ознайомлення у класах, що вивчають математику на поглибленому рівні.

За допомогою нерівностей співставляють числа, задають основні числові множини (*відрізок  $a \leq x \leq b$ , інтервал  $a < x < b$*  тощо), формулюють означення *границі, неперервної функції* в точці, *монотонної* послідовності та функції і цілого ряду інших важливих понять.

На мові нерівностей нерідко формулюється постановка завдань у багатьох сферах застосування математики. Наприклад, багато задач економіки зводяться до дослідження систем лінійних нерівностей із великим числом змінних.

Нерівності – це не лише допоміжний інструмент. У кожній галузі математики (алгебри та теорії чисел, геометрії, теорії ймовірностей, дискретній математиці тощо) можна назвати фундаментальні результати, сформульовані у вигляді нерівностей.

Розробка технологій навчання (*дидактичних технологій*), що дають можливість відповісти на питання «Як навчати результативно?» є актуальною проблемою для *змістових ліній*, які пронизують увесь курс математики на різних етапах навчання.

**Аналіз останніх досліджень і публікацій.** Питанням методики навчання учнів загальноосвітньої школи розв'язування рівнянь і нерівностей присвячені численні навчальні посібники, серед яких: «Алгебраїчний тренажер» (авт. – Мерзляк А.Г., Номіровський Д.А.); «Алгебра 10-11 класи. Методи розв'язування рівнянь, нерівно-

стей та їх систем: Розробки занять» (авт. – Корнієнко Т.Л., Фіготіна В.І.); «Навчаємось розв'язувати рівняння та нерівності» (авт. – Сільвестрова І.А., Фурман М.С.). У згаданих посібниках виділено типи рівнянь (нерівностей) і розглянуто часткові методи та способи розв'язування окремих із них.

Останнім часом велика увага приділяється задачам із параметрами, що стали невід'ємною складовою зовнішнього незалежного оцінювання (далі – ЗНО) з математики. Питання методики навчання розв'язування різних типів рівнянь та нерівностей із параметрами розглядаються у статтях Прус А.В. та Швеця В.О., опублікованих у 2015-2016 рр. у науково-методичному журналі «Математика в рідній школі» та у посібнику [13].

Принципово інший підхід запропоновано авторами науково-методичного посібника «Інноваційні методи навчання математики» (Кушнір В.А., Кушнір Г.А., Ріжняк Р.Я.) [6]. Досліджуючи проблему формування творчого мислення учнів під час розв'язування рівнянь і нерівностей, вони розглядають цей процес із точки зору послідовних перетворень, кінцевим результатом яких є розв'язок.

Такий підхід інтегрує всі типи рівнянь і нерівностей у єдину сукупність, формує в учнів загальні (інтегровані) уявлення про проблему розв'язування рівнянь і нерівностей з єдиної позиції, відкриває ще один аспект вирішення цієї проблеми, а в методичному плані спонукає вчителя до пошуку нових підходів, методик в організації вивчення відповідного матеріалу шкільного курсу математики [6, с.7].

Розгляд рівнянь та нерівностей із позиції *математичної логіки*, запропонований у навчальних посібниках [2], [5], буде корисним для випускників фізико-математичних факультетів, які одержують вищу освіту зі спеціальності 014 «Середня освіта. Математика», оскільки цей підхід належить до теоретичних основ змістової лінії «Рівняння і нерівності» шкільного курсу математики.

У попередніх статтях нами було запропоновано систематизований підхід до навчання теми «Теорія множин і шкільна математика. Відповідності та відношення у шкільній математиці» [15] та змістової лінії «Числа» [16], [17], який можна запровадити під час читання курсу за вибором «Деякі питання шкільного курсу з математики з точки зору вищої» для студентів випускних курсів педагогічних університетів, які одержують вищу освіту зі спеціальності 014 «Середня освіта. Математика».

Це питання залишається актуальним і для інших змістових ліній та тем шкільно-



го курсу математики (далі – ШKM). Стаття присвячена технології навчання змістової лінії «Рівняння і нерівності», що є наскрізною для основної, старшої та вищої школи.

**Постановка завдання.** Мета статті – представити технологію навчання теоретичних основ змістової лінії «Рівняння та нерівності» на прикладі заняття курсу за вибором «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої», призначеного для студентів-випускників педагогічних університетів, які здобувають вищу освіту зі спеціальності 014 «Середня освіта. Математика».

**Виклад основного матеріалу дослідження.** Слід зазначити, що аналізований курс читається для студентів, які засвоїли фундаментальні математичні («Лінійна алгебра», «Математична логіка», «Математичний аналіз») та фахові дисципліни («Елементарна математика», «Методика навчання математики в середній школі»).

**Мета заняття:** здійснити порівняльну характеристику функціонального підходу до означення поняття рівняння (нерівності) та підходу, що передбачає використання висловлювальної форми (предиката); використати визначення логіки для характеристики таких понять, як рівняння-наслідки, нерівності-наслідки, рівносильні рівняння (нерівності); з'ясувати властивості відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей), розглянути основні (типові) їх перетворення з точки зору еквівалентності.

#### **Завдання:**

1) провести аналіз Державного стандарту базової та повної середньої освіти (освітня галузь «математика»), навчальних програм з математики для основної та старшої школи, визначити місце рівнянь та нерівностей і понять, пов'язаних з ними;

2) проаналізувати означення поняття «рівняння» («нерівність») в ШKM та підходи, що при цьому застосовуються;

3) дослідити виникнення та розвиток цих понять в історії математики та їх застосування;

4) повторити означення понять «висловлювальна форма», «одномісний предикат», «характеристична множина (область істинності) предиката», «двомісний предикат», відомі з курсу математичної логіки;

5) скласти таблиці відповідності математичних понять, що стосуються рівнянь (нерівностей) із однією змінною та понять математичної логіки, пов'язаних з одномісним предикатом;

6) згадати відношення слідування та рівносильності між предикатами та на основі цих понять сформулювати означення рівняння-наслідку (нерівності-наслідку) та рівносильних рівнянь (нерівностей);

7) розглянути основні (типові) перетворення рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності.

Як зазначалось раніше [15]-[17], заняття курсу розпочинається з надання відповідей студентами на **контрольно-змістові питання** та виконання ними **завдань репродуктивного характеру**. До них ми пропонуємо включити завдання, пов'язані з: аналізом змісту навчального матеріалу та державних вимог до рівня загальноосвітньої підготовки учнів, зазначених у діючих програмах з математики; повторення історичних відомостей про виникнення та розвиток рівнянь і нерівностей в історії математики та їх застосування в цій та суміжних дисциплінах; повторення теоретичного матеріалу, пов'язаного з *висловлювальними формами, предикатами, відношеннями слідування та рівносильності*, що відомий учням із курсу математичної логіки; повторення поняття

Таблиця 1

#### **Змістова структура теми**

| № | Структурні елементи змісту  | Де знайти відповідь                |
|---|---|------------------------------------|
| 1 | Місце теми у програмах для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. Математика 10-11 класи. Вимоги до математичної підготовки учнів.   | [3], [12]                          |
| 2 | Виникнення і розвиток поняття рівняння (нерівність) в історії математики та їх застосування   | [1]                                |
| 3 | Теоретичний матеріал з курсу математичної логіки, пов'язаний із висловлювальними формами та предикатами   | [2], [5]                           |
| 4 | Розгляд різних підходів до означення поняття рівняння (нерівності), що передбачають використання математичних понять (виразу, функції) та понять математичної логіки (висловлювальної форми, предиката) | [4], [7]-[9], [11], [18]; [2], [5] |
| 5 | Відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей) і їх властивості   | [2], [5]; [8], [9]                 |
| 6 | Розгляд основних (типових) перетворень рівнянь (нерівностей) з погляду їх еквівалентності   | [6], [8], [9]                      |



бінарного відношення та властивостей відношень (рефлексивності, симетричності, асиметричності, транзитивності), засвоєних у курсі лінійної алгебри; згадуванням означень понять «рівняння», «нерівність», «рівняння-наслідок», «рівносильні рівняння», пов'язаних із ними; згадуванням причин одержання рівнянь-наслідків та втрати коренів під час їх розв'язування; згадуванням властивостей рівнянь (нерівностей) та особливостей їх вивчення на різних ступенях навчання (основна, старша, вища школа).

Наведемо приклади таких завдань.

**Завдання 1.** Як означається поняття «рівняння» у шкільному курсі математики?

**Відповідь до завдання 1.** У шкільному курсі математики поняття рівняння вводиться в **5 класі** описово, після розгляду задачі на пошук невідомого числа в рівності, яка містить невідоме. У підручнику з математики для 5-го класу Істера О.С. [4, с. 76] зазначається «*Рівність, що містить невідоме число, називається рівнянням*». Це не означення, а зрозумілий для п'ятикласників опис.

У курсі алгебри **7-го класу** «*Рівнянням називається рівність зі змінною, значення якої треба знайти*» [18, с. 187].

**Загальний вигляд рівняння** з однією змінною  $x - f(x) = g(x)$  представлено в курсі алгебри і початків аналізу 10 класу [9, с. 68]. Під цією короткою формулою розуміють математичний запис задачі про знаходження значень аргументу, за яких дві функції рівні.

**Завдання 2.** У якому класі поняття «рівняння» неявно означається за допомогою висловлювальної форми (предиката), а в якому класі відображено функціональний підхід до його формулювання?

**Відповідь до завдання 2.** У 10 класі відображено функціональний підхід до визначення поняття «рівняння». А в основній школі (5кл., 7 кл.) воно означається за допомогою одного з фундаментальних понять математичної логіки – висловлювальної форми (предиката).

**Завдання 3.** Згадайте відношення рівносильності між предикатами з курсу математичної логіки та означення **рівносильних рівнянь** зі шкільного курсу алгебри і початків аналізу 10 класу.

**Відповідь до завдання 3.**

Відношення **рівносильності** між предикатами. Дві висловлювальні форми, визначені на множині  $M$ , називають **рівносильними**, якщо вони набувають однакових значень істинності в них, замість змінних елементів із множини  $M$ .

$$(p(x) \equiv q(x)) \Leftrightarrow (M_p = M_q)$$

У ШКМ 10 класу дається таке **визначення рівносильних рівнянь**: Два рівняння називаються називаються **рівносильними** на деякій множині, якщо вони на ній мають одні й ті самі корені.

**Завдання 4.** З'ясуйте, чи рівносильні такі предикати:

$$\text{а) } m(x): (x+3)(x-1) = 0 \text{ і } l(x): x^2 - 2x - 3 = 0;$$

$$\text{б) } g(x): \frac{5x-1}{x^2+4} = \frac{3x+4}{x^2+4} \text{ і}$$

$$q(x): 5x-1 = 3x+4$$

Опрацювання даної теми варто продовжити за допомогою виконання завдань **реконструктивного** та **творчого характеру**. До них належать:

– знаходження сфер визначення та істинності предикатів;

– аналіз означень понять «рівняння», «нерівність» та пов'язаних із ними понять, сформульованих у курсах математики для ВНЗ;

– самостійне формулювання визначень; складання таблиці відповідності математичних та математико-логічних понять;

– розгляд властивостей відношень слідування та рівносильності на множині рівнянь (нерівностей);

– обґрунтування доведень теорем про рівносильність рівнянь, із використанням висловлювальної форми;

– дослідження перетворень рівнянь (нерівностей) на предмет зміни ними множини розв'язків тощо.

Наведемо приклади таких завдань.

**Завдання 5.** Самостійно сформулюйте означення рівняння з однією (двома) змінними, взявши за основу поняття висловлювальної форми.

**Відповідь до завдання 5.**

Означення 1. Рівняння з однією змінною на множині  $R$  визначає відображення  $R \rightarrow \{1;0\}$ , тобто є логічною функцією (предикатом) з областю визначення  $R$ , що приймає значення з  $\{1;0\}$ . Множина  $E$  розв'язків цього рівняння – підмножина  $R$ .  $E \subseteq R$

Означення 2. Рівняння з двома змінними – це двомісна висловлювальна форма, що визначає на множині  $R^2$  всеможливих пар дійсних чисел логічну функцію (предикат)  $R^2 \rightarrow \{1;0\}$ . Множина  $E$  розв'язків цього рівняння – підмножина  $R^2$  ( $E \subseteq R^2$ ), а кожний розв'язок – упорядкована пара дійсних чисел.

**Завдання 6.** Які властивості мають відношення слідування та рівносильності на множині рівнянь? Чи є вони відношеннями еквівалентності?



### Відповідь до завдання 6.

| Відношення слідування   | Відношення рівносильності  |
|---|--|
| 1) <b>асиметричність</b> : якщо одне рівняння є наслідком другого, то друге може і не бути наслідком першого  | 1) <b>рефлексивність</b> : кожне рівняння рівносильне саме собі  |
| Означення. Відношення, визначене у множині, називають <b>асиметричним</b> , якщо $(\forall a \in M)(\forall b \in M)(a, b) \in \alpha \Rightarrow (b, a) \notin \alpha$ | 2) <b>симетричність</b> : якщо одне з двох рівнянь рівносильне другому, то друге рівняння рівносильне першому                        |
|   | 3) <b>транзитивність</b> : якщо одне рівняння рівносильне другому, а друге рівносильне третьому, то перше з них рівносильне третьому |

Відношення *рівносильності* є відношенням *еквівалентності*, яке використовується при розв'язуванні, коли доводиться замінювати одне рівняння іншим.

Розглянемо завдання, пов'язані з дослідженням перетворень рівнянь на предмет зміни ними множини розв'язків.

**Завдання 7.** Нехай дано деяке рівняння:

$$f(x) = g(x), \quad (1)$$

до обох частин якого додали вираз  $h(x)$ . При цьому одержали рівняння:

$$f(x) + h(x) = g(x) + h(x) \quad (2).$$

Дослідіть та проаналізуйте, використовуючи конкретні приклади, чи може перетворення, здійснене над рівнянням (1), призвести до:

- втрати коренів рівняння;
- появи зайвих коренів рівняння.

#### Відповідь до завдання 7.

а) *Втрата коренів* відбувається завдяки звуженню ОДЗ заданого рівняння. У даному випадку до обох частин (1) додається вираз, у якого ОДЗ вужча, ніж у рівняння (1).

Приклад.  $x^2 + 5x = 0$  (1)

$$x^2 + \frac{7}{x+5} + 5x = \frac{7}{x+5} \quad (2).$$

Коренями першого рівняння є числа 0 і -5, а коренем другого – число 0.

б) *Поява зайвих коренів* відбувається в результаті розширення ОДЗ. Як приклад, варто розглянути обернений перехід від другого рівняння до першого, який можна здійснити додаванням до обох частин (2) виразу

$$h(x) = -\frac{7}{x+5}.$$

**Завдання 8.** Чи завжди розширення ОДЗ змінної рівняння приводить до появи зайвих коренів?

**Відповідь до завдання 8.** Ні. Не призводить, коли до ОДЗ другого рівняння додається число, що не є його розв'язком.

$$\text{Приклад. } 2x - 5 + \frac{1}{x-4} = 4 - x + \frac{1}{x-4} \quad (1)$$

$$2x - 5 = 4 - x \quad (2)$$

ОДЗ рівняння (1):  $x \neq 4$ . ОДЗ рівняння (2):  $x \in R$ .  $x = 4$  не є коренем другого рівняння, отже, зайві корені у другому рівнянні не з'являться.

$x = 3$  є коренем обох рівнянь.

Розглянемо завдання, пов'язане з дослідженням перетворень нерівності на предмет зміни ними множини розв'язків.

**Завдання 9.** Наведіть приклад нерівності, під час розв'язування якої відбувається розширення ОДЗ змінної нерівності та розв'язки нерівності-наслідку потрапляють до області розширення.

Прокоментуйте, які помилки можуть допустити учні під час розв'язування такої нерівності.

**Відповідь до завдання.** Прикладом такої нерівності є

$$h(x) = \sqrt{x+2}.$$

Розв'язуючи її, учні можуть відняти від обох частин вираз  $h(x) = \sqrt{x+2}$  та прийти до нерівності  $2 < -x$ , розв'язком якої є проміжок  $(-\infty; -2)$ .

Одержана при цьому нерівність  $2 < -x$ , ОДЗ якої є всі  $x \in R$ , є нерівністю-наслідком вихідної нерівності. Оскільки ОДЗ вихідної нерівності є числа  $x \geq -2$ , то можемо стверджувати, що під час розв'язування відбулось розширення ОДЗ, і розв'язки нерівності-наслідку потрапили до області розширення.

Правильно було б перейти від вихідної нерівності до системи умов

$$\begin{cases} 2 < -x, \\ x \geq -2; \end{cases}$$

за допомогою якої можна пояснити правильну відповідь до нерівності про те, що вона не має розв'язків.

**Висновки з проведеного дослідження.** Розроблене за запропонованою у статті технологією заняття курсу за вибором «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» сприяє реалізації принципів професійно-педагогічної спрямованості навчання, наступності в системі фахової підготовки майбутнього вчителя, єдності теоретичної і практичної підго-



товки. Створена для нього система задач призначена з метою систематизації знань студентів, які одержують вищу освіту за спеціальністю 014 «Середня освіта. Математика», з теоретичних основ змістової лінії «Рівняння і нерівності».

#### ЛІТЕРАТУРА:

1. Бевз В.Г. Практикум з історії математики: Навчальний посібник для студентів фізико-математичних факультетів педагогічних університетів. – К.: НПУ імені М.П. Драгоманова, 2004. – 312 с.
2. Затула Н.І. Математика: Навчальний посібник / Н.І. Затула, А.М. Зуб, Г.І. Коберник, А.Ф. Нецадим. – К.: Кандор, 2006. – 560 с.
3. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах) Ч П. Профільне навчання / Упоряд. Н.С. Прокопенко, О.П. Вашуленко, О.В. Єрміна. – Х.: Вид-во «Ранок», 2011. – 384 с.
4. Істер О.С. Математика: підруч. для 5-го кл. загальноосвіт. навч. закл. / О.С. Істер. – К.: Генеза, 2013. – 368 с.
5. Курс математики: Навч. посібник / В.Н. Боровик, Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач, О.І. Соколенко. – К.: Вища шк., 1995.-392 с.
6. Кушнір В.А. Інноваційні методи навчання математики. Науково-методичний посібник / В.А. Кушнір, Г.А. Кушнір, Р.Я. Ріжняк. Інноваційні методи навчання математики. – Кіровоград, РВВ КДПУ ім. В. Винниченка, 2008.-148 с.
7. Математика. Посібник для факультативних занять у 8 класі / В.Н. Боровик, Л.М. Вивальнюк, М.М. Мурач, В.І. Пономаренко, І.Ф. Тесленко. – К.: Радянська школа, 1981. – 206 с.
8. Мерзляк А.Г. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навч. закладів: проф. рівень / А.Г. Мерзляк, Д.А. Номіровський, В.Б. Полонський, М.С. Якір. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.
9. Нелін Є.П. Алгебра і початки аналізу: підруч. для 10 кл. загальноосвіт. навчальн. закладів: профільн. рівень / Є.П. Нелін. – Х.: Гімназія, 2010. – 416 с.
10. Освітні технології: Навчально-методичний посібник / О.М. Пехота, А.З. Кікненко, О.М. Любарська та ін.; за заг. ред. О.М. Пехоти. – К. Вид-во А.С.К., 2002. – 252 с.
11. Практикум з методики навчання математики. Основна школа: навчальний посібник для організації практичних занять і самостійної роботи студентів математичних спеціальностей педагогічних університетів / за редакцією В.О. Швеця. – К.: Вид-во НПУ імені М.П. Драгоманова, 2012. – 267 с.
12. Програма для загальноосвітніх навчальних закладів. Математика 5-9 класи. // Математика в сучасній школі. 2012. – №10. – С.3 – 16.
13. Прус А.В. Задачі з параметрами в шкільному курсі з математики. Навчально-методичний посібник / А.В. Прус, В.А. Швець – Житомир: Вид-во «Рута», 2016 / – 468 с.
14. Соколенко Л.О. Роль курсу «Деякі питання шкільного курсу математики з точки зору вищої» у професійній підготовці вчителя. Шістнадцята міжнародна наукова конференція ім. Акад. Михайла Кравчука, 14-15 травня, 2015 р., Київ: Матеріали конф. Т. 3. Теорія ймовірностей та математична статистика. Історія та методика математики. –К.: НТУУ «КП», 2015.– С. 249 – 252.
15. Соколенко Л.О. Роль наукових основ шкільного курсу математики у професійній підготовці вчителя. Вісник Чернігівського національного педагогічного університету. Серія: Педагогічні науки. – Чернігів, 2015. Вип. 130. – С. 214 – 219.
16. Соколенко Л.О. Роль теоретичних основ змістової лінії «Числа» у професійній підготовці вчителя математики // Збірник наукових праць Кам'янець-Подільського національного університету ім. Івана Огієнка. Серія Педагогічна / [редкол.: П.С. Атаманчук (голова, наук. ред.) та ін.] – Кам'янець-Подільський: Кам'янець-Подільський національний університет ім. Івана Огієнка. ім. Івана Огієнка, 2016. – Вип. 22. – С. 114 – 117.
17. Соколенко Л.О. Технологія навчання теоретичних основ теми «Розширення поняття про число» // Збірник наукових праць «Педагогічні науки» Херсонського державного університету. – Херсон, 2016. Вип. LXXI. Том 2. – С. 135 – 142.
18. Тарасенкова Н.А. Алгебра: підруч. для 7 класу загальноосвіт. навч. закл. / Н.А. Тарасенкова, І.М. Богатирьова, О.М. Коломієць, З.О. Сердюк. — К.: Видавничий дім «Освіта», 2015. — 288 с.