9. Руденко В. Консультативно-цільовий підхід до організації навчання комп’ютерних технологій // Неперервна професійна освіта: теорія і практика: Науково-методичний журнал. – 2003. – Випуск 3-4. – С. 115–122.
10. Селевко Г.К. Современные образовательные технологи. – М.: Народное образование. – 1998. – 256 с.
11. Юцявичене П. Теория и практика модульного обучения. – Каунас: Швиеса, 1989. – 272 с.

УДК 378 **Т.І. Савочкіна**

ДЕЯКІ МЕТОДОЛОГІЧНІ ТА ПЕДАГОГІЧНІ АСПЕКТИ МЕТАМАТЕМАТИКИ

Проведено дослідження деяких методологічних питань метаматематики, пов’язаних із навчальними математичними дисциплінами.

Research of some methodological questions of metamathematics, related to educational mathematical disciplines, is conducted.

Зміст навчального курсу математики в педагогічному вузі (університеті) не може визначатися лише з чисто прагматичної точки зору, яка ґрунтується на специфіці майбутньої професії, без урахування внутрішньої логіки самої математичної дисципліни (МД). Кожна із математичних дисциплін має свою внутрішню логіку і свою математичну структуру, які відіграють важливу роль усередині самої МД і є необхідними для подальшого її використання. Крім того, надзвичайно важливими у навчальному процесі є спроби сформулювати деякі характерні особливості сучасної математики – як єдиної математичної теорії, які виявляються при викладанні окремих її дисциплін і розділів. Зокрема однією із особливостей є розвиток метаматематичних досліджень, які дають глибокий аналіз основ класичної математики, аналіз зв’язків її понять, структури теорій, способів математичних доведень, удосконалення та обґрунтування математичних систем.

Мета роботи: провести методологічний і педагогічний аналіз деяких ідей метаматематики, пов’язаних із проблемою нескінченності (ПА), проблемою несуперечності (ПБ), проблемою континууму та аксіомою вибору (ПВ) при побудові математичної теорії; розкрити їх роль і місце в основних навчальних дисциплінах.

Дослідження вказаних проблем, з точки зору логіки і метаматематики проводилось у роботах [1 – 4].

Педагогічна доцільність дослідження перерахованих проблем і їх використання при викладанні основних математичних дисциплін зумовлена не тільки можливістю сучасного тлумачення математики, а і тим, що з’являється можливість інтенсифікації впливу навчання на логічне мислення.

Відмітимо, що в даній роботі історичні і філософські аспекти, пов’язані з проблемами ПА, ПБ і ПВ, не розглядаються. Фактичний матеріал, який відноситься до підручників і навчальних посібників основних МД університетів використовується без вказівок на джерела, тобто вважаються відомими. Всі невизначені поняття і позначення можна знайти в роботах [5 – 10].

Усяка навчальна математична дисципліна (як фрагмент відповідної математичної теорії) повинна задовольняти певні умови, які тісно пов’язані з методами побудови абстрактної математичної системи. Основними із яких є наступні: змістовно-аксіоматичний метод (ЗАМ); аксіоматичний метод (АМ); конструктивний метод (КМ); метод формалізації (МФ). Проблему використання перерахованих методів у навчальному курсі МД будемо досліджувати в наступних напрямках:

а) застосування методів ЗАМ, АМ, КМ і МФ, як способів побудови конкретної математичної дисципліни;

б) питання педагогізації навчального курсу математичної дисципліни, зокрема розвиток міжпредметних зв'язків основних математичних дисциплін;

в) обґрунтування конкретної МД; фінітні і не фінітні методи в математиці і їх місце в навчальному процесі;

г) застосування методу моделювання (інтерпретацій) в основних навчальних курсах МД.

З точки зору методологічних і педагогічних цілей важливими є спроби надати більш цілісну сумарну картину, пов'язану із дослідженням проблем ПА, ПБ і ПВ та із їх висвітленням у навчальних курсах математики виключно у напрямках а)-г). Слід також відмітити, що дослідження навчального курсу тієї чи іншої МД, у вказаних напрямках, виходить за рамки класичної математики і необхідно звертатися до більш широких універсальних теорій, зокрема до так званої метаматематики [1; 2].

Аксіоматичний метод є характерною рисою сучасного викладання математики. Він був розроблений одним із найвидатніших математиків XX століття Д.Гільбертом [1]. Цей метод став основним інструментом обґрунтування математики і разом з цим важливим знаряддям розвитку нових напрямів у математиці, могутнім засобом її логічної систематизації.

Формальний аксіоматичний метод побудови математичної теорії ***T*** – це розвинення, уточнення і вдосконалення змістовного аксіоматичного методу і він характеризується наступним: повним абстрагуванням від змісту (формалізацією), як необхідним засобом уточнення; чітким формулюванням усіх вихідних тверджень даної теорії; явним заданням правил виводу нових тверджень, які допускаються в теорії ***T***.

На ґрунті формального аксіоматичного методу стало можливим уточнення таких фундаментальних понять (важливих для викладання конкретної МД), як несуперечність, категоричність і повнота математичної теорії ***T***. Особливо слід звернути увагу на той факт, що теорія доведення в математиці є об'єктом самостійного дослідження (конструктивна математика). Мова йде не про метаматематичне дослідження поняття доведення твердження, а про короткий опис сучасного наукового тлумачення цього поняття. Це необхідно для того, щоб чітко уявити собі наступне: 1) наскільки доведення теорем у навчальних курсах МД відрізняється від логічного доведення (в сучасному розумінні); 2) рівень правомірності традиційно створених ілюзій "повного" доведення там, де в дійсності є суміш інтуїції і елементів логіки; 3) наскільки корисно відверто говорити студентам, що дана теорема подається без доведення, ніж проводити завідомо неповне і видавати його за логічно обґрунтоване; 4) як побудувати методику навчання доведень тверджень у кожній конкретній МД.

Зауважимо, що про строге доведення конкретної теореми можна говорити лише в межах побудованої формальної аксіоматичної МД. Слід відмітити, що фактично із розробкою теорії доведень (на основі, запропонованої у роботах Фреге, Піано і Рассела, логічної мови) Д.Гільбертом [1] і його послідовниками започаткувалося встановлення метаматематики, як самостійної наукової теорії. Відмітимо, що всяка навчальна МД може охоплювати декілька математичних теорії або їх частин.

Згідно основним вимогам метаматематики, щоб побудована математична теорія ***T*** (отже і відповідна МД) мала певне значення (тобто була науковою теорією), повинна існувати для теорії ***T*** хоча б одна модель (інтерпретація), яка реалізує цю систему. Одна й таж математична теорія може мати декілька інтерпретацій, тобто може реалізуватися в різних моделях.

Математична теорія ***T*** називається категоричною, якщо всякі дві її моделі ізоморфні. На ідеї ізоморфізму ґрунтується метод наукового моделювання в основних навчальних курсах математики (зокрема в шкільному курсі геометрії). Суть цього методу полягає в наступному. Для дослідження конкретної математичної теорії ***T*** розглядається деяка її математична модель $M(T)$. Вивчення моделі $M(T)$ дає нам знання і про саму теорію T. Зрозуміло, що заміна теорії T на деяку її модель $M(T)$ є певним спрощенням. Необхідною умовою застосування методу моделювання є те, щоб спрощення не було надмірним.

Ідея ізоморфізму та ідея інтерпретації математичної теорії T дають змогу краще зрозуміти і необхідне розширення T_1 теорії T для розв'язання певних задач і проблем МД. Так, наприклад, перехід від поля дійсних чисел R до поля комплексних чисел C дає змогу довести теорему, що всякий многочлен над полем R розкладається на лінійні множники над полем C; цей факт широко використовується в навчальному курсі алгебри при дослідженні поліномів.

Наведемо ще один приклад, який підкреслює необхідність побудови розширення T_1 для теорії T. Так, щоб уникнути різних непорозумінь (наприклад, деяких "парадоксів" в теорії множин і в логіці), а також для більшої чіткості при побудові тієї чи іншої МД, теорію множин T розширюють до теорії класів T_1. У теорії T_1 поняття класу не визначається, а поняття множини навпаки має чітко визначений характер: клас M є множиною тоді і тільки тоді, коли він є елементом деякого іншого класу. Такий підхід дає можливість обґрунтувати теорію множин і уникнути цілої низки суперечностей, пов'язаних, наприклад, з поняттям нескінченності. Так, наприклад, відомий парадокс Рассела фактично в побудованій теорії класів вже неможливий, він лише стверджує, що існують класи, які не є множинами.

За відомою теоремо К.Геделя [5] в кожній аксіоматичній теорії T, що містить арифметику, завжди можна сформулювати таке твердження "*A*", що ні "*A*", ні його заперечення "*не A*" не можливо встановити тільки логічними засобами самої теорії T. Так, наприклад, в теорії абсолютної геометрії, як відомо, не можливо ні довести ні заперечити аксіому про паралельні прямі (V постулат Евкліда), якщо ми його приймаємо, то одержуємо евклідову геометрію, якщо ми беремо його заперечення, то отримуємо гіперболічну геометрію (геометрію Лобачевського). Для розв'язання такого роду проблем і виникає необхідність розширення теорії T, до деякої нової теорії T_1, для якої істиним є лише одне із тверджень "*A*" або "*не A*".

Доцільно також розглянути наступні приклади: проблема континууму в алгебрі і теорії функцій, проблема нескінченності в теорії множин і алгебрі, проблема використання аксіоми вибору в алгебрі, геометрії та математичному аналізі, проблема несуперечності побудованої математичної теорії (МД).

Розглянемо більш детально питання пов'язані з проблемою континууму і аксіомою вибору в навчальних курсах МД. Як відомо [8], дві числові множини M і K називаються рівнопотужними, якщо існує взаємно однозначне відображення f множини M на множину K. Проблему континууму можна сформулювати (у спрощеній формі) наступним чином: ***чи існує множина M більш потужніша, ніж множина N і менш потужніша, ніж R?*** Слід відмітити, що для з'ясування цього питання затрачено багато зусиль і часу видатними математиками XX століття (Д.Гільберт, Г.Вейль, А.Колмогоров, П.Александров, А.Норден, Б.Делоне, А.Пуанкаре та інші [1; 5; 10]). Проте, повне висвітлення статусу гіпотези континууму і відомої аксіоми вибору було отримано лише в 1969 році математиком П.Коеном [2; 5]. Він довів, що у звичайних формальних системах теорії множин (наприклад, теорії множин фон Неймана-Бернсайда-Геделя) аксіому вибору і гіпотезу континууму можна вважати, як такими, що не виконуються, так і такими, що виконуються. Крім того він побудував таку систему, яка задовольняє всім звичайним аксіомам теорії множин, включаючи аксіому вибору, у якій існує множина M, для якої виконуються строгі нерівності $|N| < |M| < |R|$.

Як відомо, в навчальних МД множина M називається нескінченною, якщо існує взаємно однозначне відображення множини M на її власну підмножину B. Аналіз показує, що для нескінченних множин (зокрема числових) існує ціла низка тверджень, які не можливо довести не використовуючи аксіому вибору. Аксіома вибору полягає в наступному: ***нехай задана непуста множина M, тоді існує функція φ, яка кожній непустій підмножині D із M співставляє певний елемент $\varphi(D)$ із цієї підмножини D.*** Застосування аксіоми вибору є характерною ознакою нефінітних доведень в математиці. Про важливість цієї аксіоми для МД говорить той факт, що на II Міжнародному математичному конгресі (Франція, 1900 рік) Д.Гільберт назвав серед інших проблем і проблему повного впорядкування множини дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ ([10], проблема №1). У 1904 році Цермело довів, що аксіома вибору рівносильна наступному твердженню (теорема Цермело): ***всяку множину М можна повністю (цілком) впорядкувати***.

Аналіз основних навчальних МД показує, що аксіома вибору неявно використовується при доведенні багатьох теорем топології, геометрії, теорії міри, алгебри і функціонального аналізу. Так, наприклад, аксіома вибору знаходить своє застосування при обґрунтуванні наступного твердження: всяка нескінченна обмежена множина дійсних чисел має хоча б одну граничну точку. Наведемо також і "парадоксальне" твердження яке можна отримати за допомогою аксіоми вибору в геометрії і теорії міри Лебега. Математики Банах і Тарський довели, що дві довільні сфери $\boldsymbol{V}$ і $\boldsymbol{W}$ різних радіусів можна розбити на скінченне число точкових множин ($\boldsymbol{V} = \boldsymbol{M}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{M}_n$, $\boldsymbol{W} = \boldsymbol{L}_1 \cup \ldots \cup \boldsymbol{L}_n$) так, що $\boldsymbol{M}_i$ конгруентна $\boldsymbol{L}_i$, для кожного $\boldsymbol{i} = 1, \ldots, \boldsymbol{n}$. Зрозуміло, що множинам $\boldsymbol{M}_i$ і $\boldsymbol{L}_i$ неможливо приписати ніякої міри, оскільки порушується умова адитивності міри [8]. У зв'яжу з цим виникла відома в навчальному курсі теорії функцій дійсної змінної, так звана проблема міри: ***потрібно кожній обмеженій множині М із*** $\boldsymbol{R_n}$ ***приписати невід'ємне число*** $\boldsymbol{\mu(M)}$ ***так, щоб міра n-мірного кубу*** $\boldsymbol{K_n}$ ***дорівнювала 1, а конгруентні і обмежені множини із*** $\boldsymbol{R_n}$ ***мали однакову міру і виконувалась умова адитивності (σ-адитивності) міри*** $\boldsymbol{\mu}$.

У навчальному курсі теорії функцій проблема міри (з умовою скінченної адитивності) має розв'язок для просторів $\boldsymbol{R}_1$ і $\boldsymbol{R}_2$, але неоднозначний. Для простору $\boldsymbol{R}_n$ $\boldsymbol{n} \geq 3$ проблема не розв'язна, тобто для будь-якої міри $\boldsymbol{\mu}$ завжди знайдеться обмежена множина $\boldsymbol{M}$, яка не має міри. Перше твердження встановлене С.Банахом, а друге – Ф.Хаусдорфом. Важливо відмітити, що різниця між цими твердженнями пояснюється тим, що поняття конгруентності точкових множин, яке входить у визначення міри $\boldsymbol{\mu}$, суттєво пов'язане з поняттям руху в просторі $\boldsymbol{R}_n$. Так в просторі $\boldsymbol{R}_3$ група рухів значно "більша" за групу всіх рухів простору $\boldsymbol{R}_2$.

Накінець відмітимо, що задача існування узагальненої міри μ у випадку $\boldsymbol{\sigma}$-адитивності не має розв'язку навіть для простору $\boldsymbol{R}_1$.

Наведені приклади говорять про те наскільки необхідним у навчальній МД є критичне ставлення до логічних основ її побудови, а питання існування математичних об'єктів є важливою проблемою, яку викладач не повинен ігнорувати. Відомий математик А.Пуанкаре у свій час відмітив наступне: якщо існувати – це означає тільки бути вільним від суперечностей, то нам залишається лише навчитися оперувати невимірними множинами із "парадоксами" типу розбиття сфер Банаха-Тарського.

Як уже відмічалося, основна задача метаматематики полягає в аналізі конкретної (як правило, формалізованої) математичної теорії $\boldsymbol{T}$ (отже і відповідної МД).

У ранній період розвитку математики загальним прагненням було використання елементарних (фінітних) методів доведення, виключаючи всі нефінітні. Яскравим представником цього напрямку був Д.Гільберт. Він вважав [1], що на цьому шляху можна провести повне обґрунтування несуперечності математики, використовуючи аксіоматичний метод, розгляд формальних моделей змістовної математики і дослідження таких моделей надійними фінітними засобами.

Питання несуперечності різноманітних математичних теорій по суті розглядалися і до Д.Гільберта. Заслуга Д.Гільберта полягає в тому, що він намітив прямий шлях для дослідження цієї проблеми. Висунута ним програма обґрунтування математики започаткувала інтенсивний розвиток аксіоматичного методу для побудови математичних теорій. Запропонований Д.Гільбертом [1] і розвинутий його послідовниками ***метод формалізації математики*** виявився не тільки корисним у дослідженні метаматематичних проблем основ математики. Цей метод зробив великий вплив на розвиток і появу нових розділів сучасної математики.

Одним із найбільш вагомих і значущих досягнень метаматематики є розробка поняття загально-рекурсивної функції і відомий вислів Черча (1936 рік), який стверджує, що поняття рекурсивної функції є уточненням поняття алгоритму в математиці. Вся сучасна математика по суті пов'язана з тими чи іншими алгоритмами. Тільки після уточнення поняття алгоритму з'явилася можливість виявити існування нерозв'язних алгоритмічних проблем у математиці. Останні, як правило, тісно пов'язані з фундаментальними поняттями навчальних курсів МД.

Слід відмітити, що в 1930 році К.Гедель довів теорему про повноту числення предикатів [5]. Звідси випливає, що числення предикатів є тією логічною системою, на базі якої з'явилася можливість формалізувати, якщо і не всю математику, то хоча б деякі її розділи.

Відомо, що існує чітка відмінність математики, як предмета вивчення, від математики, за допомогою якої відбувається це вивчення. У зв'язку з цим слід відрізняти два рівня мови, а саме: предметну мову, на якій формулюється математична теорія (предмет дослідження), і метамову, на якій досліджується предметна мова, за допомогою необхідних логічних засобів. Такий підхід привів у 1931 році К.Геделя до визначного відкриття – доведення теореми про неповноту формальної арифметики, яка поклала крах надіям Д.Гільберта на повне розв'язання питань пов'язаних із обґрунтуванням основ математики. Із цієї теореми випливає, що формальна арифметика не є категоричною теорією, тобто не всі її моделі ізоморфні [5].

Фактично К.Гедель довів дві наступні метатеореми [5]: I) якщо формалізована теорія $\boldsymbol{F}$ несуперечна і містить арифметику, то вона є дедуктивно неповною; II) для формалізованої несуперечної теорії $\boldsymbol{F}$, яка містить арифметику, не існує доведення її несуперечності засобами самої теорії $\boldsymbol{F}$.

Перша теорема фактично доводить, що не всяка задача в теорії $\boldsymbol{F}$ має розв'язок, а друга доводить неможливість арифметичного доведення несуперечності самої формальної арифметики ([10], друга проблема Д.Гільберта). Аналогічна ситуація і з деякими іншими його проблемами. Так, наприклад, десята проблема Д.Гільберта стосується розв'язності в цілих числах діофантових рівнянь [10]. Проблема полягає у відшуканні такого методу (алгоритму), за допомогою якого можна було б визначити, має рівняння цілі розв'язки чи не має. Однак у 1971 році Ю.Матиясевич довів, що такого алгоритму взагалі не існує.

Слід відмітити, що в 1936 році німецький математик Генцен [4], використовуючи метод трансфінітної індукції, довів несуперечність арифметики, однак питання про несуперечність самої трансфінітної індукції залишається відкритим. Аналогічні результати стосовно формальних математичних теорій отримали і інші математики (Аккерман (1940 рік), Лоренц (1951 рік), Хлодовський (1959 рік)). Хоча їх доведення несуперечності теорії $\boldsymbol{T}$ належить до розряду нефінітних і виходить за межі теорії $\boldsymbol{T}$ вони мають велику пізнавальну цінність у навчальному процесі, сприяють глибокому розумінню природи основ математики, що є надзвичайно важливим для майбутніх учителів математики.

Крім того, використання нових, нефінітних методів у навчальному курсі МД значно полегшує з'ясування математичної структури формалізованої теорії. Як відомо [6], множина усіх термів формалізованої математичної теорії $\boldsymbol{T}$ утворює універсальну алгебру (як правило, з нескінченною множиною операцій), а клас усіх формул $\boldsymbol{F}$ є алгеброю (взагалі кажучи) з нескінченними операціями. Після відповідної факторизації алгебри $\boldsymbol{F}$ за відношенням еквівалентності $\boldsymbol{\varepsilon}$ на $\boldsymbol{F}$, фактор-алгебра $\boldsymbol{F}^* = \boldsymbol{F}/\boldsymbol{\varepsilon}$ є фактично булевою алгеброю [7], псевдобулевою алгеброю або топологічною алгеброю (залежно від типу логіки, що застосовується в теорії $\boldsymbol{T}$). Звідси випливає можливість застосування апарату алгебри, теорії множин і топології для дослідження конкретної математичної теорії.

Метод розгляду множини формул або множини класів еквівалентності формул, як універсальних алгебр, виявився знаряддям багатьох досліджень. Цей метод встановлює зв'язок між метаматематикою теорії $\boldsymbol{T}$, яка ґрунтується на класичній логіці, і теорією булевих алгебр. Так, наприклад, відома теорема К.Геделя про повноту числення висловлень [5] є фактично модифікацією теореми Стоуна про зображення булевих алгебр. Крім того, розкривається ще одна можливість розвитку міжпредметних зв'язків дисциплін математичного циклу, що сприятиме якісному опануванню студентами МД.

Метод моделювання (метод інтерпретацій) широко застосовується при дослідженні математичних теорій на несуперечність і в навчальному процесі. Відомо ([1], [6]), що у випадку існування моделі $\boldsymbol{L}$ для теорії $\boldsymbol{T}$, несуперечність $\boldsymbol{T}$ фактично зводиться до несуперечності теорії $\boldsymbol{S}$, засобами якої побудована модель $\boldsymbol{L}$. Наведемо приклади.

Відома модель Келі-Клейна гіперболічної площини зводить питання несуперечності останньої до несуперечності евклідової геометрії. Евклідова геометрія має арифметичну модель, отже вона несуперечна, якщо несуперечна арифметика. Метод моделей широко застосовується і в навчальному процесі як в педагогічному вузі, так і в середній школі. Достатньо відмітити, що вивчення векторів у геометрії (фактично елементів теорії лінійних просторів) здійснюється за допомогою різних моделей: арифметичної, направлених відрізків, паралельних перенесень. Залежно від теми вивчення застосовується певна модель. Так, наприклад, при вивченні операцій над векторами доцільно користуватись направленими відрізками, а при означенні і доведенні властивостей скалярного добутку бажано використовувати арифметичну модель.

Аналогічна ситуація і з теорією проективного простору $\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}$ розмірності n над полем $\boldsymbol{R}$. У навчальному курсі проективної геометрії доводиться, що всякі дві моделі простору $\boldsymbol{P}_{\mathrm{n}}$ ізоморфні. Зокрема для проективної площини $\boldsymbol{P}_2$ основними моделями є: розширена евклідова площина $\boldsymbol{\gamma}$, за допомогою невласної прямої $\boldsymbol{d}_{\infty}$ (модель $\boldsymbol{\gamma}^* = \boldsymbol{\gamma} \cup \boldsymbol{d}_{\infty}$); в'язка прямих $\boldsymbol{\Pi}(\boldsymbol{O})$ евклідового простору з центром в точці $\boldsymbol{O}$. Оскільки теорія проективної площини $\boldsymbol{P}_2$ над полем дійсних чисел $\boldsymbol{R}$ категорична, то доведення теорем для $\boldsymbol{P}_2$ зручно проводити, використовуючи модель $\boldsymbol{\gamma}^*$. Так, наприклад, доведення відомої теореми Дезарга має наглядний характер на площині $\boldsymbol{\gamma}^*$, що сприяє розумінню логіки самого доведення.

Розглянемо тепер теорію булевих алгебр [7]. З елементами цієї теорії студенти зустрічаються в наступних навчальних дисциплінах: математична логіка, універсальна алгебра, теорія множин, теорія функцій дійсної змінної, теорія ймовірностей. Булева алгебра – це алгебраїчна система, яка залежно від обставин, може інтерпретуватися або як алгебра випадкових подій, або як числення висловлень, або як алгебра множин. Спеціальний клас $\boldsymbol{\sigma}$-алгебр є основою аксіоматичної побудови теорії ймовірнісного простору $\boldsymbol{T} = (\boldsymbol{F}, \boldsymbol{P})$, де $\boldsymbol{F}$ – $\boldsymbol{\sigma}$-алгебра подій, а $\boldsymbol{P}$ – ймовірнісна міра.

Як відомо [9], основні задачі навчального курсу теорії ймовірностей полягають у наступному: 1) формалізація поняття ймовірності і вивчення загальних властивостей теорії $\boldsymbol{T}$; 2) побудова дослідження і класифікація різних математичних моделей теорій $\boldsymbol{T}$; 3) методологічний і педагогічний аналіз тих розділів теорії ймовірності, які мають безпосередній вихід на відповідний курс шкільної математики.

Вивчення теорії ймовірності на базі булевих алгебр дає можливість не використовувати традиційну теоретико-множинну основу і не звертатися до інтегралу Стільт'єса, що суттєво спрощує математичні викладки в навчальному курсі і робить їх більш доступними для розуміння студентів 3-4 курсів.

Слід відмітити, що особливе значення в розвитку теорії ймовірності, як навчальної МД, мають роботи А.М.Колмагорова. Він розробив, на наш погляд, найбільш досконалу аксіоматичну систему теорії ймовірності. В сучасному навчальному курсі теорії ймовірності розглядаються наступні моделі: теоретико-множинна, геометрична, дискретна, класична. Кожна із перерахованих моделей відіграє значну роль як при вивченні навчального курсу теорії ймовірностей, так і при розв'язанні практичних задач.

Із наведених прикладів випливає, що одна математична теорія $\boldsymbol{T}_1$ може виступати в ролі моделі для іншої математичної теорії $\boldsymbol{T}_2$. Отже, поняття математичної моделі є відносним.

Підкреслимо, що при всій простоті постановки задач метаматематики є ціла низка важких і глибоких проблем, які ще не знайшли свого розв'язання і в наш час. Ці проблеми носять різноманітний характер вони пов'язані як с класичними МД, так і з цілою низкою нових розділів математики.

Відмітимо, що всяка окремо взята МД не може дати повне пояснення проблем ПА, ПБ і ПВ. Спроба дати відповідь на це запитання і була однією із задач проведеного дослідження. Питання про сутність цих проблем завжди піднімалося в різних розділах математики. Так, наприклад, у цілій низці навчальних дисциплін (фізиці, математиці, космології) студенти зустрічаються з суперечностями, які пов'язані з різноманітними типами "нескінченності", серед яких слід відмітити наступні нескінченності: актуальна, потенціальна, метрична, топологічна, еліптична і скінченно-безмежна. Роль нескінченного в МД надзвичайно важлива.

Так, у навчальному курсі теорії функцій дійсної змінної, актуальна нескінченність є об'єктом вивчення. У курсі геометрії студенти зустрічаються з поняттям метричної нескінченності при вивченні елементів ріманової геометрії. Тут важливо відзначити наступний факт: абстрактна математична теорія чотиривимірного метричного простору знайшла широке застосування у теорії відносності. Її математичний апарат дає змогу глибше усвідомити найважливіший висновок цієї теорії про зв'язок простору і часу. В навчальному курсі алгебри вивчаються питання пов'язані з так званими кардинальними і ординальними числами (на предмет узагальнення поняття скінченного числа), які тісно пов'язані з поняттям актуальної нескінченності множини і цілком впорядкованої множини. Зокрема теорема Цермело стверджує, що множину всіх дійсних чисел R можна цілком впорядкувати, однак хоча б одного способу такого впорядкування ще не знайдено.

Відмітимо, що Д.Гільберт назвав математичний аналіз "єдиною симфонією нескінченного" [1]. З іншого боку відомо, що неможливо провести повне математичне обґрунтування несуперечності теорії нескінченного в межах класичних МД.

Із сказаного вище ще не випливає, що не існує інших шляхів і подальшого розвитку питань, пов'язаних із проблемами ПА, ПБ і ПВ. З деякими фрагментами такого розвитку і дослідження студенти зустрічаються в навчальному курсі "Числові системи" (4 курс) та в семестровому курсі "Основи геометрії" (3 курс).

Для методологічного дослідження статусу перерахованих проблем потрібно (викладачам) виходити за межі класичних МД і звертатися до більш широких універсальних теорії, зокрема до метаматематики. У зв'язку з цим доцільно ввести в навчальний план спецкурс "Основи метаматематики", основною ціллю якого є: дослідження проблем ПА, ПБ і ПВ, і таких як проблема інтерпретацій, проблема застосування конструктивних методів, застосування нефінітних методів, проблема розв'язності, з точки зору метаматематики; прояснити їх роль в основних МД.

Таким чином, на нашу думку, навчальний курс "Основи метаматематики" повинен: розкривати більш глибоко логічну і математичну структуру навчального курсу; виявляти сутність міжпредметних зв'язків основних математичних дисциплін; сприяти поглибленню професійної підготовки майбутніх магістрів зі спеціальності математика. Це може бути доведене у подальших наукових розвідках.

ЛІТЕРАТУРА:

1. Гильберт Д., Бернайс П. Основания математики. Логические исчисления и формализация арифметики. – М.: Наука. – 1979. – 557 с.
2. Расёва Е., Сикорский Р. Математика метаматематики. – М.: Наука. – 1972. – 591 с.
3. Янов Ю.И. Математика, метаматематика и истина. – М.: Препринт Ин-т прикладной математики им.М.В.Келдыша. – 2006. – 32 с.
4. Генсен Г. Исследование логических выводов // Математическая теория логического вывода. – М.: Наука. – 1967. – С. 9-74.
5. Вивальнюк Л.М., Григоренко В.К., Левіщенко С.С. Числові системи. – К.: Вища школа. – 1988. – 271 с.
6. Мендельсон Э. Введение в математическую логику. – М.: Наука. – 1976. – 320 с.
7. Владимиров Д.А. Булевы алгебры. – М.: Наука. – 1969. – 318 с.

8. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. – М.: Наука. – 1976. – 543 с.
9. Гихман И.И., Скороход А.В., Ядренко М.И. Теория вероятности и математическая статистика. – К..: Вища школа. – 1988. – 440 с.
10. Александров П.С. Проблемы Гильберта. – М.: Наука. – 1969. – 239 с.

УДК 371.132: 37.036 **Л.О. Савченко**

ВИКОРИСТАННЯ ПЕДАГОГІЧНОЇ ДІАГНОСТИКИ ЯК ЗАСОБУ РОЗВИТКУ ТВОРЧИХ ЗДІБНОСТЕЙ МАЙБУТНІХ УЧИТЕЛІВ

У статті розглянуті проблеми використання педагогічної діагностики на заняттях з педагогічних дисциплін як засобу підвищення творчого потенціалу майбутніх учителів.

Problems of pedagogical diagnostics usage at the lessons on pedagogical subjects as means of increasing creative potential of the future teachers are considered in the article.

Постановка проблеми. Глибокі соціальні, духовні й економічні зрушення, що відбуваються на межі третього тисячоліття в Україні, вимагають підвищення рівня професіоналізму працівників сфери освіти. У зв’язку з докорінними перетвореннями, що відбуваються в сучасному суспільстві, не тільки зростає роль освіти, але й змінюються її функції, які полягають у перенесенні акцентів із системи знань на особистість студента, розвиток його духовних і моральних здібностей, це потребує формування умов для саморозвитку особистості.

У період становлення національної системи освіти особливого значення набувають питання використання діагностичних методик у вищій школі. Педагогічна діагностика як система методів і засобів створює основу для виявлення труднощів у роботі, дозволяє визначити сильні чи слабкі сторони педагогічної діяльності, накреслити оптимальні шляхи подальшого розвитку творчих здібностей майбутніх фахівців. Отже, існує реальна потреба суспільства в розвитку інтелектуального потенціалу та розвитку творчих здібностей кожної людини. І найважливіша роль у цьому процесі належить впровадженню в практику вищої школи – діагностичних методик.

Аналіз останніх досліджень і публікацій. Педагогічною діагностикою займались такі вчені і визначили її М.М. Обозов (процес аналізу результатів особистості), В.І. Зверов (визначення рівня педагогічних явищ), Л.М. Денякін (розпізнання творчого потенціалу особистості). Нині розробленням цієї проблеми займаються М.М. Ржецький, Н.М. Розенберг, В.І. Бондар, І.В. Распопов, І.Є. Булах, Ю.І. Мальований, Л.Л. Момот, О.А. Козаков, С.У. Гончаренко та інші українські дослідники. Вивчаючи роботи вчених Вітупака Р.Г., Гуревича К.М., Підласого П.І., Гріднана Л.М., Шмельова О.Г. та інших, ми дійшли висновку, що педагогічна діагностика – це система способів, процедур, методик, методів висвітлення обставин, умов і чинників функціонування педагогічних процесів, установлення ефективних наслідків щодо заходів, які передбачаються або здійснюються.

Мета статті: розкрити сутність педагогічної діагностики та її вплив на розвиток творчих здібностей майбутніх учителів.

Результати дослідження. Педагогічна діагностика припускає розпізнавання стану певного об’єкта або системи шляхом швидкої реєстрації його суттєвих параметрів і наступного ставлення до певної діагностичної категорії з метою прогнозу поведінки в бажаному напрямку. Загалом дослідження розвивалися в традиційному діагностико-прогностичному напрямі, вивчалися проблеми тестування, планування, проектування, організації та контролю навчально-виховного процесу, підвищення кваліфікації педагогів та встановлення рівня їхньої професійної підготовки. Розвиткові педагогічної діагностики